ECG1 # *TD n°23 : Intégrales impropres*

Exercice 1. Étude de la convergence à l'aide de la définition

Étudier la convergence, et en cas de convergence, préciser la valeur des intégrales :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(2t+3)^2}\,\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2^t}\,\mathrm{d}t \qquad I_3 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad I_4 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 2. Utilisation des critères de comparaison

Étudier la convergence des intégrales :

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \qquad I_3 = \int_1^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t$$

Exercice 3. Fonction définie par une intégrale

On considère la fonction f définie par :

$$f(t) = \frac{\ln t}{t - \ln t} \quad \text{si } t > 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = -1$$

1. (a) Montrer que f est définie et continue sur $[0,+\infty[$.
   (b) Déterminer le signe de f sur $[0,+\infty[$.
2. On considère la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par : $\quad F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$
   (a) Montrer que F est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, puis étudier ses variations.
   (b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$.
   (c) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t-\ln t}\,\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
   (d) Donner l'allure de la courbe représentative de F.

Exercice 4. Extensions

1. Étudier la convergence, et en cas de convergence, préciser la valeur de l'intégrale :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

2. Même question avec :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_0^{1/e} \frac{1}{t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t \qquad I_3 = \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad I_4 = \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 5. Changement de variable

1. En effectuant le changement de variable $u = \dfrac{1}{1-t}$, étudier la convergence de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \exp\left(\frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t.$$

2. En effectuant le changement de variable $u = 1 - t$, étudier la convergence de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 6. Intégrale de Gauss

On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ converge et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Soient $\alpha > 0$ et $x > 0$, on pose :

$$I(x) = \int_0^x 2u^2 e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad J(x) = \int_0^x t^2 e^{-(t/\alpha)^2}\,\mathrm{d}t$$

1. A l'aide d'un changement de variable, exprimer, pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$, $J(x)$ en fonction de $I\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$:

$$I(x) = \int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u - xe^{-x^2}$$

3. En déduire que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-(t/\alpha)^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{\alpha^3\sqrt{\pi}}{4}$.

Exercice 7. Utilisation d'une série

Soit α un réel tel que $\alpha > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n(\alpha) = \frac{n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(\alpha+k).}$$

On a vu dans le TD n^{o}17 que : $u_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Le but de l'exercice est d'étudier la nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$ pour $\alpha > 1$ (on avait que pour $\alpha \in]0,1]$ cette série diverge).

Pour cela, on pose pour tout entier naturel n :

$$I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\left(1-e^{-t}\right)^n\,\mathrm{d}t$$

1. (a) Étudier la convergence de l'intégrale généralisée $I_n(\alpha)$ et calculer $I_0(\alpha)$.
   (b) Soit un réel x strictement positif. Intégrer par parties :

   $$\int_0^x e^{-\alpha t}(1-e^{-t})^n\,\mathrm{d}t$$

   En déduire une relation simple entre $I_n(\alpha)$ et $I_{n-1}(\alpha+1)$, pour tout n entier naturel non nul.
   (c) En déduire : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ I_n(\alpha) = u_n(\alpha)$
2. On suppose désormais que $\alpha > 1$.
   (a) Montrer que, pour tout N entier naturel :

   $$\sum_{n=0}^{N} I_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} - I_{N+1}(\alpha-1)$$

   (b) En déduire que la série de terme général $u_n(\alpha)$ converge et donner en fonction de α la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha)$.